ಗುಣಾಕಾರದ ಗುಣಗಳು

ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಗೆ (ಮತ್ತು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ) ದೃಶ್ಯ ಸಮರ್ಥನೆ

ಅನುವಾದ :ಜನಾರ್ದನ್ ಸಿಎಸ್ , ಚೈತನ್ಯಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್ , ಮೈಸೂರು

ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ಸಂಕಲನಗಳಿಗೆ ಸಚಿತ್ರ ಸಮರ್ಥನೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದ ನಂತರ ಅದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಈ ಪುರವಣಿಯು ಗುಣಾಕಾರದ ಗುಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಮಾದರಿ: ಒಂದು ಚದರಮಾನವು ಪೂರ್ಣವನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ, ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ 4 ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಮಾಡಿ ಅದರಲ್ಲಿ 1ಕ್ಕೆ ಛಾಯೀಕರಿಸುವ ಮೂಲಕ ¼ ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೆಯೇ 2 ಚೌಕಗಳನ್ನು 3 ಸಮ ಭಾಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಮಾಡಿ 5 ಭಾಗಗಳನ್ನು ಛಾಯೀಕರಿಸುವ ಮೂಲಕ 5/3 ಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ (ಚಿತ್ರ 0).

< < < < < < < < < < < < < < < < < < < < < < ಚಿತ್ರ 0 ಯನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು >

ಗುಣಾಕಾರದ ಸರಣಿ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ ನೋಡಿದರೆ ಪರಿವರ್ತನೀಯತೆ ಹಾಗು ವಿಭಾಜಕತೆಯ ಗುಣಗಳು ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಗಳ ಮುಂದುವರಿಕೆಯಷ್ಟೇ. ಇದರಲ್ಲಿ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಆಯತದ ಮೂಲಕ ತೋರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಅದರಲ್ಲಿ ಲಂಬ ಭಾಗವು ಗುಣ್ಯವಾಗಿದ್ದು ಅಡ್ಡ ಭಾಗವು ಗುಣಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ 2/3 X 4/7ತೋರಿಸಲಾಗಿದ್ದು ಬಣ್ಣ ಹಚ್ಚಿದ ಭಾಗವು 3X7 ಭಾಗಗಳಲ್ಲಿ 2 X 4   ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ 2×4/ 3×7. ಚಿತ್ರ 4 4/3 X 2/7 ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಬಣ್ಣ ತುಂಬಿದ ಭಾಗವು 3X7 ನಲ್ಲಿ 4 X 2 ಇದೆ. 4×2/ 3×7. ಲಂಬದ ಉದ್ದಕ್ಕೂ ತೋರಿಸಿರುವ 4/3 ಒಂದು ವಿಷಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿ ಆದ್ದರಿಂದ ಅದು ಒಂದು ಮಾನ ಚೌಕದ (ದಪ್ಪ ಗೆರೆಯಿಂದ ಸೂಚಿಸಿದೆ) ಆಚೆಗೂ ಬಂದಿದೆ.

ಗುಣಾಕಾರದ ಪರಿವರ್ತನೀಯತೆಯ ಗುಣ

ಇಲ್ಲಿ 3 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ:

1. ಸಮ X ಸಮ
2. ವಿಷಮ X ಸಮ (ಹಾಗು ∴ಸಮ X ವಿಷಮ)
3. ವಿಷಮ X ವಿಷಮ

1 ಮತ್ತು 2ರ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ನೀಡುತ್ತೇವೆ. ಹಾಗು 3 ನ್ನು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರೆಸಬಹುದು.

ಸಮ X ಸಮ

ಚಿತ್ರ 2ನ್ನು ಪಡೆಯಲು. ಚಿತ್ರ 1 ಅನ್ನು 90° ತಿರುಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ಛಾಯೀಕರಿಸಿದ ಭಾಗವು 3 × 7ರಲ್ಲಿ 2 × 4 ಭಾಗಗಳು ಅಂದರೆ 2 × 4 / 3 × 7.

ಆದರೆ ಚಿತ್ರ 2ರಲ್ಲಿ 7 × *3*ರಲ್ಲಿ 4 × *2* ಭಾಗಗಳು ಅಂದರೆ 4 × *2* / 7 × *3* ಆಗುತ್ತದೆ.

ತಿರುಗಿಸಿರುವುದು ಒಂದು ಅನಮ್ಯ ಪರಿವರ್ತನೆಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಬದಲಾವಣೆಗಳಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹಾಗಾಗಿ 2 × 4 / 3 × 7. = 4 × *2* / 7 × *3*.. ಅಂದರೆ ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗೆ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಸಮ X ವಿಷಮ

ಹಿಂದಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿನಂತೆಯೇ ಚಿತ್ರ 4ನ್ನು ಪಡೆಯಲು. ಚಿತ್ರ 3 ಅನ್ನು 90°ತಿರುಗಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಅಂದರೆ 2/7 X 4/3 = 4/3 X 2/7. ಚಿತ್ರ 3 ರಲ್ಲಿ ಗುಣಕವಾದ 4/3 ಒಂದು ವಿಷಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅಡ್ಡವಾಗಿ ಛಾಯೀಕರಿಸಿದ ಭಾಗವು ಚದರಮಾನದ ಚೌಕದಿಂದಾಚೆಗೂ ಚಾಚಿಕೊಂಡಿದೆ. ಚಿತ್ರ 4 ರಲ್ಲಿ ಗುಣ್ಯವು ವಿಷಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಲಂಬವಾಗಿ ಛಾಯೀಕರಿಸಿದ ಭಾಗವು ಚದರಮಾನದ ಚೌಕದಿಂದಾಚೆಗೂ ಚಾಚಿಕೊಂಡಿದೆ.

ಈ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಾಂಕ X ಭಿನ್ನರಾಶಿಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲೂ ಬಳಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಏಕೆಂದರೆ ಯಾವುದೇ ವಿಷಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ. ವ್ಯಾಖ್ಯೆಯ ಪ್ರಕಾರ 0 ಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡ ಗುಣಾಕಾರವು 0 ಯೇ ಆಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 0 ಯು ಇದ್ದಾಗ ಪರಿವರ್ತನೀಯ ಗುಣವು ತಾನಾಗಿಯೇ ನಿರೂಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ.

<<<<< ಚಿತ್ರ 1, 2, 3 ಮತ್ತು 4 ನ್ನು ಸೇರಿಸಿ >>>>>>

ಗುಣಾಕಾರದ ವಿಭಾಜಕತೆಯ ಗುಣ

ಇಲ್ಲಿ 6 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ:

1. ಸಮ X (ಮೊತ್ತ
    a. ಸಮ X (ಸಮ + ಸಮ)
    b. ಸಮ X (ಸಮ + ವಿಷಮ)
    c. ಸಮ X (ವಿಷಮ + ವಿಷಮ))
2. ವಿಷಮ X (ಮೊತ್ತ
    a. ವಿಷಮ X (ಸಮ + ಸಮ)
    b. ವಿಷಮ X (ಸಮ + ವಿಷಮ)
    c. ವಿಷಮ X (ವಿಷಮ + ವಿಷಮ))

ಸಮ + ವಿಷಮ = ವಿಷಮ + ಸಮ ಎಂದು ಹಿಂದಿನ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಚರ್ಚಿಸಿದ ಸಂಕಲನ ಪರಿವರ್ತನೀಯತೆ ಗುಣವು ನಮಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ. 1a ಮತ್ತು 2b ಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನಷ್ಟೇ ನಾವಿಲ್ಲಿ ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ಓದುಗರು ಉಳಿದ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಬಹುದು.

ಸಮ X (ಸಮ + ಸಮ)

$\frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3} \right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

ಎರಡೂ ಘನಗಳ ಛಾಯೀಕರಿಸಿದ ಅಡ್ಡ ಭಾಗಗಳ ಉದ್ದದ ಮೊತ್ತವು $4/7 + 2/3$ ನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಹಾಗು ಲಂಬದ ಉದ್ದವು $3/4$ ಇದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಛಾಯೀಕರಿಸಿದ ಭಾಗವು $3/4 \times (4/7 + 2/3)$. ನಸುಗೆಂಪು ಬಣ್ಣದ ಭಾಗವು $3/4 \times 4/7$ ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ ಹಸಿರು ಬಣ್ಣದ ಭಾಗವು $3/4 \times 2/3$ ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಛಾಯೀಕರಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಭಾಗವು $3/4 \times 4/7 + 3/4 \times 2/3$. ಆದ್ದರಿಂದ $3/4 \times (4/7 + 2/3) = 3/4 \times 4/7 + 3/4 \times 2/3$.

ವಿಷಮ X (ಸಮ + ವಿಷಮ)

$\frac{5}{3} \times \left(\frac{2}{7} + \frac{7}{4} \right) = \frac{5}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{3} \times \frac{7}{4}$

ಚಿತ್ರ 11ರಲ್ಲಿನಂತೆಯೇ ಚಿತ್ರ 12ನ್ನೂ ಅರ್ಥ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ವಿಷಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯು ಇದ್ದಾಗ ಅದೇ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಮಾನ ಚದರವನ್ನು ಛಾಯೀಕರಿಸಿದ ಭಾಗವು ಮೀರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ (ಹಾಗು ಸೊನ್ನೆಯೂ ಸೇರಿದಂತೆ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ) ಯಾವುದೇ ಸಂಯೋಜನೆಗೆ ಇದು ದೃಶ್ಯಾತ್ಮಕವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಹಾಯವಾಗುತ್ತದೆ.

<<<<<<<<<<<< ಚಿತ್ರ 12 ನ್ನು ಸೇರಿಸಬೇಕು >>>>>>>>>

ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೀಯತೆಯ ಗುಣ

ಗುಣಾಕಾರದ ಸಹವರ್ತನೀಯತೆಯ ಗುಣವು ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾಗಿ ನಾವು ಘನಫಲ ಹಾಗು 3 ಆಯಾಮದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಅಂದರೆ ಒಂದು ಘನಫಲವುಳ್ಳ ಘನವನ್ನು ಪೂರ್ಣದಂತೆ ಹಾಗೂ ಅದರ y, x ಮತ್ತು z ಅಕ್ಷಗಳು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಂತೆ ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. ಇಲ್ಲಿ 8 ಸಾಧ್ಯತೆಗಳಿವೆ.

1. ಮೂರೂ ಸಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು
2. ಎರಡು ಸಮ ಮತ್ತು ಒಂದು ವಿಷಮ
    a. ಸಮ X ಸಮ X ವಿಷಮ
    b. ಸಮ X ವಿಷಮ X ಸಮ
    c. ವಿಷಮ X ಸಮ X ಸಮ
3. ಒಂದು ಸಮ ಮತ್ತು ಎರಡು ವಿಷಮ
    a. ಸಮ X ವಿಷಮ X ವಿಷಮ
    b. ವಿಷಮ X ಸಮ X ವಿಷಮ
    c. ವಿಷಮ X ವಿಷಮ X ಸಮ
4. ಎಲ್ಲವೂ ವಿಷಮ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳು

2c ಅನ್ನು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ ಇಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದ್ದು, ಉಳಿದದ್ದನ್ನು ಅದೇ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು. 3 ಆಯಾಮದ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಹಂತ ಹಂತವಾಗಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಯಾಗಿ $(4/3 \times 5/9) \times 1/2 = 4/3 \times (5/9 \times 1/2)$ ಅನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ. ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ಕಾಣಿಸಲೆಂದು ಎರಡು ಘನಗಳ ನಡುವೆ ಜಾಗ ಬಿಡಲಾಗಿದೆಯಾದರೂ ಅದು ಇರಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ. ಎರಡೂ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೂ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಬರುವ ಘನಫಲವು ಒಂದೇ ಆಗಿದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ ಮೂರು ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳಿಗೆ (ಹಾಗೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ) ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದು.

ಸ್ವಾತಿ ಸರ್ಕಾರ್ ಅವರು ರಚಿಸಿರುವ ಈ ಭಿತ್ತಿಪತ್ರವು ದೃಶ್ಯದ ಮೂಲಕ ಸಮರ್ಥನೆ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಔಪಚಾರಿಕ ಸಾಧನೆಯ ಜೊತೆ ಸಮೀಕರಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇದು ಪದ್ಮಪ್ರಿಯ ಶಿರಾಲಿಯವರು ರಚಿಸಿದ – ಗುಣಾಕಾರ (ಸಂಪುಟ 3, ಸಂಚಿಕೆ 1) ಮತ್ತು ಭಿನ್ನರಾಶಿ (ಸಂಪುಟ 1, ಸಂಚಿಕೆ 1) ಪುರವಣಿಗಳು ಹಾಗು ಶೈಲಜಾ ಡಿ

ಶರ್ಮ ಅವರು ರಚಿಸಿದ (ಸಂಪುಟ 7, ಸಂಚಿಕೆ 2) ಪುರವಣಿಯ ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ಗುಣಾಕಾರದ ದೃಶ್ಯ ಮಾದರಿಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ.